波動光学
エンジニアリングの
基礎

牛山善太 著

オプトロニクス社

波動光学エンジニアリングの基礎

牛山善太 著

オプトロニクス社

まえがき

近年，回折光学素子の製造技術が高まり，実用的な面からも注目を集めている。様々な光学系に組み込まれ，これまで以上の革新的な結果をもたらす大きな可能性を持っている。また，CCD素子に代表される撮像素子の高細密化に伴い，デジタル・カメラ向けの光学設計においても回折像の評価が，非常に重要となって来ている。そして，様々な照明系設計に於いて偏光による影響を考慮すべき光学設計も一般的に成りつつあり，さらに，通常の光源のみを対象とするのではなく，レーザ光に於ける様なビーム状の光波に対しても光学設計に際し，より汎用的な評価手法が望まれている。

こうした状況において，光学技術者，特に光学設計者には，上述の光学系・素子・光波による現象を説明し得る波動光学の理解が必要になる。かような知識は一般的には物理光学の書物に記されている。ところが，これまで，実際的な光学技術，幾何光学，収差論，設計論などと取り組んで来た光学設計者，技術者は必ずしも物理の専門家ではなく，波動光学的な領域での仕事に於いては，その基礎となるべき知識・経験が異質なものである場合も少なくない。そこで，一般的な波動光学が記されている物理のテキストとは趣きを異にした，従来の光学設計技術と繋がりを持ち，平易な，そしてクリアーな波動光学の解説が必要とされる。本書はこの様な主旨に沿っている。

本書では，光を電磁波として扱い，主に，光学素子の構造も，そして光源，或いは光学素子相互の空間も波長よりも十分に大きい場合を扱っている。波動光学を取り入れる際にも，この様な自由空間，或いは媒質境界面における微細であると同時にダイナミックな光波伝播のコントロールが光学設計者・技術者の変わらない基本的な仕事であると筆者は認識している。本文ではこの様な実務的な領域において，回折，干渉，偏光，境界条件，レーザ・ビーム，コヒーレンシー，レンズ等の光学系を含めた光波伝播計算等の基本的な

事柄について解説している。

かように本書は有益な内容を目指し，またある程度の役割は果たし得るものと信じているが，何分，筆者の力不足の故，不明瞭な点，或いは思わぬ誤り等が存在する可能性も否めず，もし，こうした点をご指摘，ご批評賜ることが出来れば幸いである。

最後に，本書の出版に際しなにかとご尽力いただいた㈱オプティカル・ソリューションズの関英夫社長，出版の機会を与えてくださった㈱オプトロニクス社，川尻多加志編集長，いろいろと有益なご助言をいただいた独Jena大学のProfessor Frank Wyrowski，そして，その他のお世話になった方々にこの場を借りて厚く御礼申し上げる。

2005年3月

牛山 善太

目　次

第1章

波動の基本的概念

1.1　Maxwellの方程式と波動方程式

1.1.1　波動方程式

光は電磁場の変化により生じる電磁波である。そして電磁場とは電荷が空間に及ぼす励起状態により成る場であり，以下に挙げる5つのベクトル$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$そして，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{H}$によって記述される。そしてこれらの5つのベクトルの時間，空間座標による微分は，マクスウェル（Maxwell）の方程式により関係付けられている。

一般の媒質中におけるマクスウェルの方程式は，媒質中の電荷密度をρ，媒質中に生じる電流密度を$\boldsymbol{j}$として，電束密度$\boldsymbol{D}$，磁束密度$\boldsymbol{B}$，電場の強さ$\boldsymbol{E}$，磁場の強さ$\boldsymbol{H}$により，

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho \tag{3}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0 \tag{4}$$

と表わされる。これらの式に光学系媒質の性質，形状などを考慮し，また，性質の異なる媒質同士の境界面に於いての電磁場の有様を規定する境界条件を与え，必要な精度に応じた，より具体的に検討可能な解を得ることが可能となる。

この時，分極$\boldsymbol{P}$，磁化$\boldsymbol{M}$，真空中の誘電率ε_0，透磁率μ_0を用いて

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{B} = \mu_0 (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M})$$

である。また，これから，我々が取り扱う一般的な場合には，χ_e，χ_mをそれぞれ感受率，磁化率として

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H} \tag{4.5}$$

なる，線形の関係が得られる。従って一般媒質中における電束密度$\boldsymbol{D}$，磁束密度$\boldsymbol{B}$は，電場の強さ$\boldsymbol{E}$，磁場の強さ$\boldsymbol{H}$より

$$\boldsymbol{D} = (1 + \chi_e)\varepsilon_0 \boldsymbol{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \boldsymbol{E} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{B} = (1 + \chi_m)\mu_0 \boldsymbol{H} = \mu_r \mu_0 \boldsymbol{H} = \mu \boldsymbol{H} \tag{6}$$

と簡潔に表わされる。ε_rは比誘電率，εは誘電率，μ_rは比透磁率，μは透磁率であり，

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}, \quad \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \tag{7}$$

なる関係がある。

さて，本書で主に取り扱う誘電体とは，そこに電荷が存在せず，電場を加えても電流の生じない媒質のことを言う（透明な真空，空気，液体，硝子の様なもの)。よって，誘電体中のマクスウェルの方程式は$\boldsymbol{j}=0$，$\rho=0$として

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}(\mu \boldsymbol{H}) \tag{8}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}=\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \boldsymbol{E}) \tag{9}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D}=\mathrm{div}(\varepsilon \boldsymbol{E})=0 \tag{10}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}=\mathrm{div}(\mu \boldsymbol{H})=0 \tag{11}$$

ここでは媒質に対しての等方性は仮定していないので，一般的には媒質の光学的性質を表わすε，μ（実際にはμはスカラー定数とおいて差し支えない。）は電磁場の振動方向に依存したテンソル量で有り得ることに注意を要する。

さて，等方性のある媒質中においては，μ，εが電磁場の振動方向に依存しないスカラー量となるので(5)，(6)式より(8)，(9)式は

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H}=\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{12}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E}=-\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{13}$$

となる。さらにε，μが波長オーダーの領域内で空間的に均一に分布していると考えられる場合には

$$\mathrm{div}\boldsymbol{H}=0 \tag{14}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E}=0 \tag{15}$$

上記，(12)～(15)式が光学で多く用いられる等方性誘電体媒質におけるマクスウェルの方程式である。

さて，ここで（12)式をtで微分して

$$\mathrm{rot}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}=\varepsilon\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{16}$$

(13)式のrotをとり，(16)式の関係を用いると（以下の計算では(14)，(15)式の場合と同様にε，μが微小な領域内では急激に変化せず，空間的な均一性を想定できる場合を取り扱う。不均一な場合には付録A参照。)，

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\boldsymbol{E})=-\mu\,\mathrm{rot}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}=-\varepsilon\mu\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{17}$$

ベクトルの公式と(15)式より

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\boldsymbol{E})=\mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{E})-\Delta\boldsymbol{E}=-\Delta\boldsymbol{E} \tag{18}$$

よって，(17)，(18)式より

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial z^2}=\varepsilon\mu\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{19}$$

さらに定数をまとめて，

$$v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{20}$$

なる媒質中の速度vを導入して（真空中は当然光速cとなる。）

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{21}$$

磁場についても同様にして

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} \tag{22}$$

これらの式は，各定数，ベクトル関数について同じ形の式であるので，波動を一つのスカラー関数に代表させることができる。これをスカラー波と呼ぶ。

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \tag{23}$$

この(23)式はスカラー波動方程式と呼ばれる。関数Uは電場・磁場ベクトルの成分を代表している。

実用的なレベルでは圧倒的に多くの光学系に対してスカラー理論は十分な精度で結果をもたらす。また，そこで見通しの良い理論的な検討も可能となる。しかし，スカラー波の表現自体には光波の進行方向は示されていても振動方向の情報は含まれていない。従って，進行方向，あるいは電磁場の振動（偏光）方向が大きく異なる光波同士の合成を考える場合には（21)，(22)式における$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}$の様なベクトル表現が必要になる。

さらに，本書の取り扱う範囲からは外れるが，波長オーダーの物質の精密な構造を問題にする場合には，物質構造は感受率，分極延いては誘電率εの空間的な分布として表現され得る。本来は物質と光の関係を計算するためには微視的な世界で，物質を構成する原子核，電子などの運動を詳細に検討して，物質中でのミクロな領域での電流密度，或いは分極$\boldsymbol{P}$を決定せねばならない。しかし一般的な光学理論が構成されるマクロな世界では，原子と比べ十分に大きく，しかし波長と比べ十分に細かな適切な領域ごとの平均をとることにより感受率，或いは分極を物質固有の定数として決めてしまい，そこからマクスウェル方程式の計算をスタートする。誘電体の場合の様に真の伝