フレネル係数、特性マトリクス

光学薄膜の基礎理論

増補改訂版

小檜山 光信 著

OPTRONICS
株式会社オプトロニクス社

増補改訂版の序文

本書の初版が出版されてから7年半が経過しました。初版を出版するときに、その序文にも書きましたが、国内外の多くの研究者や技術者達の名著を読んで基礎理論から勉強して自分の研究・仕事に合った種々の計算プログラムを作成するのは、少なからず大変なので、私のノートや講演資料を整理して出版させて頂きました。そのときは、特性マトリクスによる分光特性の計算などのプログラムは普及しているので、フレネル係数による解析を中心に種々の解析を行いたいと考えました。そして、フレネル係数を利用した分光特性、成膜時の光学式モニターの光量変化の計算、基板および薄膜の光学定数の計算プログラムを付属のCDに収めました。しかし、この間に、フレネル係数の重要性はわかったが、やはり、プログラミングが楽な（適した）特性マトリクスによる多層膜フィルターの分光特性計算プログラムや種々の解析プログラムを自分で作成したいけれど、難しいという多くの意見が寄せられました。付属CDに収められた便利なプログラムは、古いバージョンのVisual Basicで作成したものなので、最近の新しいOSでは動作しないという問題も発生しています。そのため、この改訂版では、付属CDを止めました。そこで、今回は特性マトリクスによる多層膜フィルターの分光特性計算プログラムをHP Basic for Windows（現在は、HTBasic for Windowsとして販売されています）により新たに作成し直して、第4章にそのアルゴリズムを丁寧に解説するとともに、そのリストを付録Cに追加掲載しました。HP Basic for Windowsは、構造化プログラミングなので理解しやすいと思います。技術者は必要なプログラムを自分で作成できなければならないというのが、私の信念です。どうか、これらを参考にして、自分の得意なプログラミング言語を利用して、自分用のプログラムを作成して下さい。また、第5章では計算に必要な式をまとめ、EXCELによる基板や薄膜の光学定数の計算例を式の番号とともに記載しましたのでご利用下さい。

光学薄膜とは直接、関係ないようですが、光学特性に大きな影響を及ぼす基板の面精度と面粗さについて、新たに章を追加しました。高性能な反射防止膜、フィルターやミラーなどを作製する場合は、まず、光学ガラス販売メーカーのカタログを調べて、基板の面精度および面粗さのよい基板を選択するでしょう。面精度がよくて、面粗さが小さい基板が良いには決まっていますが高価です。要求仕様以上の選択をしていないでしょうか。あるいは、逆に仕様を満足する基板を選択しているでしょうか。そこで、まず、面精度の計測の基礎となるニュートンリングの実際的な応用、例えば、面精度による反射光束径の広がり、光学平面（オプティカルフラット）はなぜ、$\lambda/10$や$\lambda/20$の精度が必要なのか、反った平板基板の面精度計測の原理などを記述しました。面粗さの節では、基礎理論をわかり易く解説して面粗さとフィルターの分光特性との関係などについて述べましたが、読者の理解の一助になればと、できるだけ図を多く掲載しました。そして、最後にスクラッチやディグという面粗さについてのMIL規格、ANSI規格、ISO規格について解説を加えました。特に米国の光学基板供給メーカーのカタログを見ると、スクラッチの評価基準については解釈が異なる場合がありますのでご注意下さい。国内では、㈶レーザー技術総合研究所が中心になって高出力レーザーミラーや反射防止膜の高性能化について民間企業を応援しています。分光特性の計算や成膜方法の改良だけでは、これらのフィルターに対する要求を満たすことはできません。本章を読んで、是非とも基板の面精度および面粗さについて、今一度、検討し直して下さい。必ずや読者のお役に立つと信じておりま

す。しかし、私の理解・勉強の不足や自分の能力の不足からそう思いこんでしまった箇所があると思います。読者の皆様のご教示を頂いて、その都度訂正していきたいと思います。

還暦を過ぎた今も、このように皆様に技術的なことをお伝えできるのも、私が以前に約13年間勤務した会社でその間、常に暖かく励まして下さった成田敏雄様（元・真空器械工業㈱・代表取締役社長、現・㈱シンクロン）のお陰と心から感謝してします。本当にありがとうございました。東海光学㈱・薄膜事業部部長・鬼崎康成氏、課長・田村耕一氏と主務・杉浦宗男氏には数々の助言を頂きました。また、㈱オプトロニクス社・取締役・柴崎栄氏には出版に至るまで本当にお世話になりました。この原稿のすべての図表を自分で作成したため、約２ケ月間掛かりました。その間、ほとんど会社に寝泊まりをしましたが、それを認めて心から応援してくれた私の妻・英子と、そして丈夫な身体と持続力を与えてくれた亡き両親に感謝します。ありがとうございました。

2011年2月
小檜山　光信

初版の序文

光学フィルターは、近年のオプトエレクトロニクスの目覚ましい発展に伴いますます重要になっています。その基礎や応用に関しては、H.A.Macleod、A.Thelen、Z.Knittl、M.Born&E.Wolf、E.Hecht、久保田広、李正中や他の多くの研究者達の名著が出版されています。特に、Macleod、Thelenや李正中は現在も、精力的に活躍して多くの優れた研究者を育てています。私もこの分野の仕事に従事した頃は、Macleodの名著Thin-Film Optical Filtersの初版本を苦労して勉強して、光学フィルターの反射率・透過率、位相変化、光学モニター光量変化計算や薄膜内のレーザー誘導損傷計算などの様々なプログラムを作成しました。最近はコンピューターのWINDOWS上でランする優れた数々のプログラムが市販されるようになり、複雑な光学フィルターの設計も基礎知識が少しあればゲーム感覚で行えるようになりました。また、国内でも光学薄膜の基礎や応用に関する書籍や解説記事も多く見られるようになりました。しかし、光学フィルターは、成膜装置の方式、蒸着材料、成膜パラメーターにより薄膜の屈折率や消衰係数が変化して、設計通りにできないことがあります。実際に使用している成膜装置における真空中および大気中の誘電体や金属薄膜の光学定数を求めなければなりません。また、将来を考えて、あるいは自分自身の興味（とても重要なことです）から、これらの資料を参考にして基礎理論から勉強して自分の研究・仕事に役立つ種々の計算プログラムを作成したい、という若い技術者も多いようです。しかし、

・それらの書籍を開くと、まずマクスウェル（J.C.Maxwell）の方程式がでてきます。学生時代は電磁気学の授業でマクスウェルの方程式を習ったが、もう忘れてしまった。あるいは学生時代は化学や機械を専攻したので、全く先に進めない。
・マクスウェルの方程式から導かれる特性マトリクスを利用して透明な波長領域における分光反射率・透過率特性は計算できるようになったが、どうも物理的イメージが湧かない。
・紫外域では基板や薄膜の吸収を無視できないことは知っている。分光特性を計算したいが、特性マトリクスではsineやcosineに虚数単位が入ってきてどうしたらよいかわからない。特に斜入射になると計算が複雑そうである。
・吸収がある基板や薄膜、さらには金属薄膜の光学定数を求めたいが、計算方法がわからない。
・理論は何とかわかったが、実際にEXCELやVisual Basicなどで計算プログラムを作成したいけれど大変そうだ。分光特性や光学モニターの光量変化計算のアルゴリズムがわからない。
・エリプソメーターによる偏光解析の勉強をしたい。書籍を見ると特性マトリクスではなくフレネル係数が有効そうである。しかし、それに関する書籍・資料が見当らない。
・市販されている理論計算プログラムは、小数点何桁まで計算値が正しいのだろうか。

などの声を聞くことが多くなりました。国内ではコーティングを行っている多くの会社があり、そこには多くの優れた技術者達がおります。古き良き時代はこのような基礎的なことは時間外に勉強会あるいは研究会と称して仲間同士でゼミを開催していました。しかし、そのような方々も年輩あるいは地位が高くなり若い技術者を教育する時間的余裕はなくなってきています。また、近年は光学フィルターを研究している学生も多くなってきています。そんな折、これから光学薄膜を勉強する人や実際に研究・生産に従事している技術者のためにその基礎理論

をできるだけやさしく、しかも即、利用できるような本を出版して欲しいと要請されました。そこで、私がいままで作成したノートや講演資料を整理して

・光学薄膜を理解するのに最低限必要な波動の知識
・フレネル係数の基礎
・フレネル係数による多層膜の計算
・特性マトリクスによる計算
・基板や薄膜の光学定数の測定
・光学モニターの光量変化の計算

についてできるだけ具体的に解説した本書を出版することにした次第です。フレネル係数は古い理論ですが、波動の物理的イメージを捉えることができ、誘電体や金属薄膜の光学定数の測定や偏光解析にも有効です。フレネル係数を利用すれば、四則演算と三角関数だけで、薄膜や基板に吸収がある多層膜系の斜入射時の反射率・透過率や位相特性が計算できます。さらに特性マトリクスによる解析も記号を統一して整理しました。私がはじめて基礎理論を勉強したときに悩んだことを思い起こして、可能な限り図表を記載し、種々の計算式の導入にあたっては途中の計算をできるだけ省略せずに記載しました。正直言って、本書を熟読してEXCELで種々の計算プログラムを作成しようとすると、打ち間違いが多く大変だと思います。そこで、図表作成のためのEXCELプログラムを各章ごとに付属のCDに納めました。EXCELではマクロ機能は使用せず、簡単なコマンドのみを使用しました。しかし、吸収および斜入射を考慮した多層膜の分光反射率・透過率特性や光学モニターの光量変化計算は、マクロ機能を使用しないと大変なプログラムになります。そこで、これらの計算プログラムは、私が長年、慣れているHP Basic for Windowsでプログラムを作成し、プログラムおよび主な変数リストを付録に記載しましたので参考にしてください。さらに、WINDOWS上でランするようにVBでも作成してCDに収めてあるのでご利用ください。CDの利用方法については、あとがきに注意事項を記しました。

本書が皆さんのお役に立つことを心から願いますが、しかし、私の理解・勉強の不足や能力の不足からそう思いこんでしまった箇所があると思います。また、ミスプリントもあると思います。読者の皆様のご教示を頂いて、訂正していきたいと思います。なお、海外の研究者達の呼び名は理化学事典（岩波出版）に記載されている人だけをカタカナにして、それ以外はそのまま記載しました。

最後に、長年、光学薄膜および生き方に関していつも適切なアドバイスをくださり、本書の執筆を強くお勧めくださった笠原一郎様（㈲ケイワン・代表取締役、元㈱応用光電研究室・取締役）、今まで執筆や講演の機会を多く与えてくれた小倉繁太郎様（神戸芸術工科大学・教授）、日常の業務で忙しいのに関わらずVisual Basicによるプログラムを自宅で作成してくれた鬼崎康成様（東海光学㈱薄膜事業部・部長）、小栗和雄様（同・課長）そして私が以前に約13年間勤務した会社でその間、常に暖かく励ましてくださった成田敏雄様（真空器械工業㈱・元代表取締役（現、㈱シンクロン））に心からお礼申し上げます。本書の複雑な図をCADで我慢強く作成してくれた私の息子・翔に感謝します。また、㈱オプトロニクス社の柴崎栄部長、愛知俊弘様、緒方秀正様には出版に至るまで本当にお世話になりました。ありがとうございました。

2002年12月25日
小檜山　光信

目　次

1. 光学薄膜のための基礎 ……………………………… 1

1.1 波動の表現 ……………………………… 1
1.2 単振動 ……………………………… 2
1.3 波動関数 ……………………………… 4
1.4 位相速度と群速度 ……………………………… 7
1.5 誘電体と屈折率 ……………………………… 10
1.6 スネルの法則と波長分散 ……………………………… 15
1.7 光学膜厚 ……………………………… 20
1.8 偏光 ……………………………… 22

2. フレネル係数の基礎 ……………………………… 29

2.1 垂直入射 ……………………………… 29
2.2 斜入射 ……………………………… 32
2.3 吸収媒質への垂直入射 ……………………………… 40
2.4 吸収媒質への斜入射 ……………………………… 42
2.5 吸収基板の裏面反射を考慮した反射率、透過率 ……………………………… 44
2.5.1 垂直入射 ……………………………… 44
2.5.2 斜入射 ……………………………… 46
2.6 まとめ ……………………………… 47
2.6.1 垂直入射 ……………………………… 47
2.6.2 斜入射 ……………………………… 48
2.6.3 吸収媒質への垂直入射 ……………………………… 48
2.6.4 吸収媒質への斜入射 ……………………………… 49
2.6.5 基板の裏面反射を考慮した反射率、透過率 ……………………………… 50

3. 単層薄膜 ……………………………… 52

3.1 垂直入射 ……………………………… 52
3.1.1 反射率、透過率および位相変化 ……………………………… 52
3.1.2 分光特性 ……………………………… 59
3.1.3 成膜時の反射率、透過率および位相変化 ……………………………… 62
3.2 斜入射 ……………………………… 64
3.3 吸収単層膜への垂直入射 ……………………………… 67
3.4 吸収単層膜への斜入射 ……………………………… 72

3.5　特性マトリクスによる計算 ……76
3.5.1　垂直入射 ……76
3.5.2　斜入射 ……86
3.5.3　吸収単層膜への垂直入射 ……86
3.5.4　吸収単層膜への斜入射 ……89

4.　多層薄膜 ……93

4.1　垂直入射 ……93
4.1.1　吸収がない場合 ……93
4.1.2　吸収がある場合 ……99
4.2　斜入射 ……104
4.3 基板の裏面反射を考慮した分光特性 ……107
4.3.1　基板の内部透過率T_i ……107
4.3.2　基板から薄膜への反射率R_g ……108
4.3.3　多重繰り返し反射 ……110
4.4　特性マトリクスによる計算 ……117
4.4.1　垂直入射、斜入射 ……117
4.4.2　吸収多層膜への垂直入射 ……128
4.4.3　吸収多層膜への斜入射 ……129
4.4.4　特性マトリクスの性質および演算 ……132

5.　光学定数の測定 ……137

5.1　分光特性測定上の注意 ……137
5.1.1　サンプル ……137
5.1.2　分光器 ……138
5.2　分光器による基板の光学定数の測定 ……140
5.2.1　透明基板 ……140
5.2.1.1　片面マット基板の反射率から ……140
5.2.1.2　両面研磨基板の反射率、透過率から ……142
5.2.2　吸収基板 ……143
5.3　分光器による薄膜の光学定数の測定 ……147
5.3.1　透明薄膜 ……147
5.3.2　若干の吸収がある均質薄膜 ……149
5.3.3　若干の吸収がある不均質薄膜 ……154
5.3.4　金属薄膜 ……160
5.3.4.1　透過率、反射率、膜厚から ……160
5.3.4.2　反射率から ……163
5.3.4.3　金属膜＋SiO_2薄膜の反射率から ……165

5.3.5 半導体Si薄膜 ……167
5.3.5.1 グラフ法 ……169
5.3.5.2 最適設計 ……170
5.4 光学モニターによるin-situ測定 ……172
5.4.1 透明薄膜 ……172
5.4.2 金属薄膜 ……175
5.5 まとめ ……180
5.5.1 分光器による基板の屈折率 ……180
5.5.2 分光器による透明薄膜の屈折率 ……185
5.5.3 光学モニターによる透明薄膜の屈折率 ……185

6. 光学モニターの光量変化 ……189

6.1 光学モニター ……189
6.2 光量変化計算の理論 ……191
6.2.1 装置下部からの測光方式 ……193
6.2.2 装置上部からの測光方式 ……195
6.3 プログラム作成上の留意点 ……195
6.4 計算プログラム ……199

7. 基板の面精度と面粗さ ……206

7.1 基板の面精度 ……207
7.1.1 面精度の定義 ……207
7.1.2 ニュートンリング ……211
7.1.2.1 球面の場合 ……211
7.1.2.2 平面の場合 ……214
7.2 基板の面粗さ ……216
7.2.1 面粗さ ……216
7.2.2 基板の面粗さと反射率 ……222
7.2.3 粗さのある透明な薄膜の反射率 ……228
7.2.3.1 薄膜の粗さの取扱いについて ……228
7.2.3.2 単層膜 ……229
7.2.3.3 各界面の粗さが同一な多層膜 ……243
7.3 面粗さの規格 ……251
7.3.1 MIL規格 ……251
7.3.2 ANSI / OEOSC規格 ……253
7.3.3 ISO規格 ……254

付録 A ……………………：フレネル係数による分光特性計算プログラムリスト
B …………：フレネル係数による分光特性計算プログラムの主な変数解説
C ………………：特性マトリクスによる分光特性計算プログラムリスト
D ……………………：光学モニターの光量変化計算プログラムリスト
E …………………………………：三角関数・双曲線関数の公式
F ……………………………………：ギリシャ文字の読み方
G ………………………………………………：SI接頭語

あとがき

第1章
光学薄膜のための基礎

「光は粒子性と波動性を持っている」と言われるが、光の波動論は1667年にフック（R. Hooke）が光の本性を波動と解して波面の概念を導入したことから始まる。その後、ホイヘンス（C. Huygens）、フレネル（A. J.Fresnel）[1]、ヤング（T. Young）やマクスウェルら多くの研究者により確立された。そして、その応用として種々の光学フィルターの理論が展開され、Z.Knittl [2]、M.Born & E.Wolf [3]、H.A.Macleod [4]、A.Thelen [5]、久保田[6]による名著や多くの研究者による論文がある。また、都筑[7]、吉田・矢嶋[8]、永田[9]、森下[10]、大槻[11]による波動および光学薄膜についての優れた解説書もある。本章では、光学薄膜を理解するための波動としての光の数式的な扱いや次章以降の理解に必要な基礎事項についてこれらの資料を参考にして平易に解説する。

1.1　波動の表現

光は横波の電磁波である。つまり、電界と磁界を持っているが、いま光の電界のある瞬間を見た波形（実際には見えない）を**図1.1**に示す。波の最も高いところを山、最も低いところを谷、隣り合った山と山（あるいは谷と谷）との距離を波長λ（wavelength）、元の水平な面から山の距離を振幅（amplitude）という。

時間が変化して、山→谷→山になるのに要する時間を周期（period）という。周期がTであるということは、ある位置の山が単位時間内に$1/T$回上下振動することになり、これを波の振動数ν（frequency）[1/s]といい、光の場合は周波数f [Hz]という。すると、波の山がν回通過したこと、つまり波は$\lambda\nu$だけ移動したことになる。λ

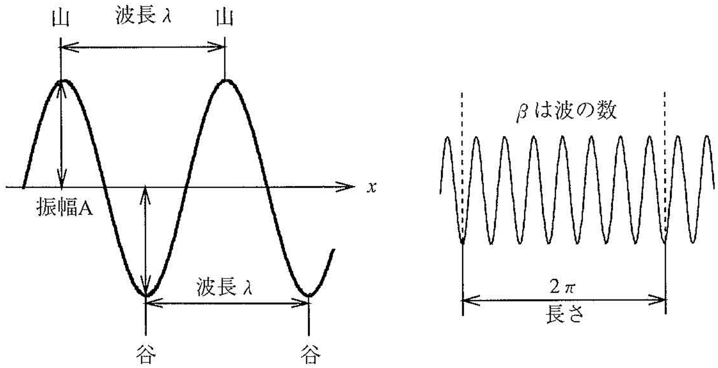


図1.1　波の表示

ν の単位は[m/s]となり、速さ（velocity）

$$v = \lambda \nu = \lambda / T \, [m / s] \tag{1-1}$$

となる。正確には速度と速さは異なり、速度vはベクトル（大きさと向きをもつ）、速さは速度の大きさv = | v | を表すスカラー量である。また、光の場合は長さ2π（単位長）の中に波長λの波が何個入っているかが重要となり

$$\beta = 2\pi / \lambda \quad [\,/\mathrm{m}] \tag{1-2}$$

で表し、波数（wave number）と呼ばれる。波動の解析では重要な変数の１つであり、波の進行方向を考えて、通常はベクトルで表される。（多くの書籍および論文では、一般に波数には記号kが使用されているが、本著では光の吸収を表す消衰係数（extinction coefficient、後述）にkを使用するので、波数をβで表す。）

【Coffee Break】光の波長と周波数

光は通常の光学フィルターでは波長、光通信では周波数あるいは波長で表されることが多い。光の速さは定数であり、約3×10^8m/sである。（1-1）式から、周波数f = 193.10THzの光は波長λ = 1553.599nmとなる。しかし、光の速さは正確には c = 299,792,458m/sであり、この値を用いるとλ = 1552.524nmとなり約1nmの差が生じる。光通信の国際機構ITU（International Telecommunication Union）では正確な光の速さを使用することを規定している。

1.2　単振動

それでは、波動としての光はどのような式で表すことができるだろうか。光は直進し円運動はしないが、運動の最も単純な単振動（simple harmonic oscillation）がどのような式で表されるかを調べてみよう。**図1.2**のように円周上の点Pが半径aの円周上を等速円運動をしているとする。微小時間Δt内の角度変化$\Delta\theta$の変化量

$$\sum_{\Delta t \to 0} \lim \Delta\theta / \Delta t \tag{1-3}$$

を角速度（angular velocity）といい、一般にωで表す。点Pが1周する時間T（周期）で角度2πだけ移動するので

$$\omega = 2\pi / T = 2\pi \nu \tag{1-4}$$

となる。ωは2π秒当たりの振動回数を与え、角振動数（angular frequency）という。

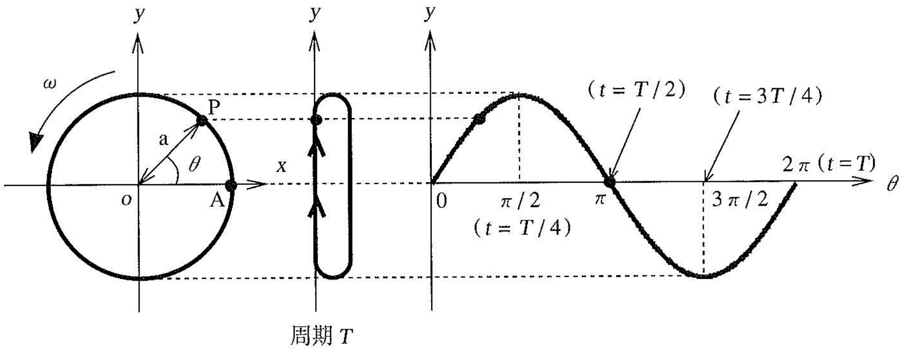


図1.2　単振動

光ではこれを角周波数（angular frequency）という。したがって、点Pをy軸に投影すると、A点からの時間 t 後の変位は

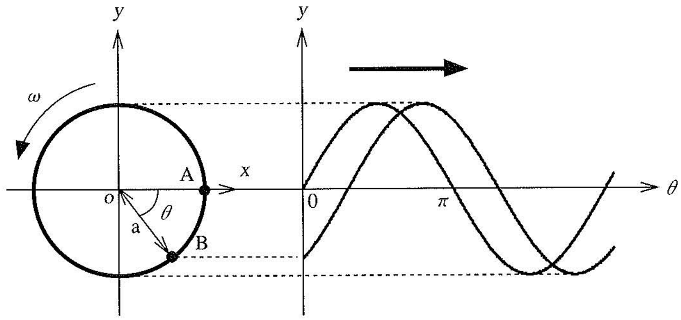
$$y = a\sin(2\pi \times t / T) = a\sin 2\pi\nu t = a\sin\omega t \tag{1-5}$$

で表される。変位yを縦軸、回転角 θ を横軸にグラフを書くとsine曲線が得られ、これが単振動の式であることが分かる。

図1.3（a）の点Bが点Aより、角度 θ だけ遅れて角速度 ω で等速円運動をしているとして、縦軸を変位y、横軸を角度 θ としてグラフを書くと**図1.3（b）**のようになる。点Bは θ だけ遅れて点Aに迫ってきているので、Bの波はAの波より位相（phase）が θ だけ遅れた波という。視点を変えれば、Bの波はAの波より位相が（$2\pi - \theta$）だけ進んでいるともいえる。波を式で表すと、その変位は

$$\begin{cases} A: y = a\sin\omega t \\ B: y' = a\sin(\omega t - \theta) = a\sin\{\omega t + (2\pi - \theta)\} \end{cases} \tag{1-6}$$

となる。ωt、（$\omega t - \theta$）や｛$\omega t +$（$2\pi - \theta$）｝を位相、$-\theta$ や（$2\pi - \theta$）を初期



(a)　　(b)

図1.3　位相のずれ

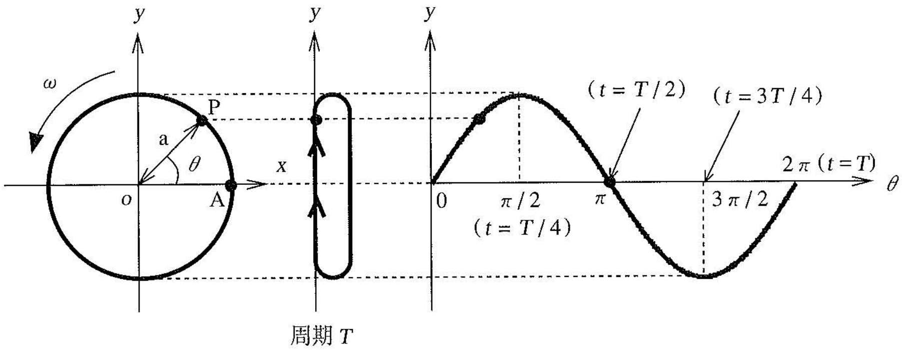


図1.2　単振動

光ではこれを角周波数（angular frequency）という。したがって、点Pをy軸に投影すると、A点からの時間 t 後の変位は

$$y = a\sin(2\pi \times t / T) = a\sin 2\pi\nu t = a\sin\omega t \tag{1-5}$$

で表される。変位yを縦軸、回転角 θ を横軸にグラフを書くとsine曲線が得られ、これが単振動の式であることが分かる。

図1.3（a）の点Bが点Aより、角度 θ だけ遅れて角速度 ω で等速円運動をしているとして、縦軸を変位y、横軸を角度 θ としてグラフを書くと**図1.3（b）**のようになる。点Bは θ だけ遅れて点Aに迫ってきているので、Bの波はAの波より位相（phase）が θ だけ遅れた波という。視点を変えれば、Bの波はAの波より位相が（$2\pi-\theta$）だけ進んでいるともいえる。波を式で表すと、その変位は

$$\begin{cases} A : y = a\sin\omega t \\ B : y' = a\sin(\omega t - \theta) = a\sin\{\omega t + (2\pi - \theta)\} \end{cases} \tag{1-6}$$

となる。ωt、（$\omega t-\theta$）や｛$\omega t+$（$2\pi-\theta$）｝を位相、$-\theta$ や（$2\pi-\theta$）を初期

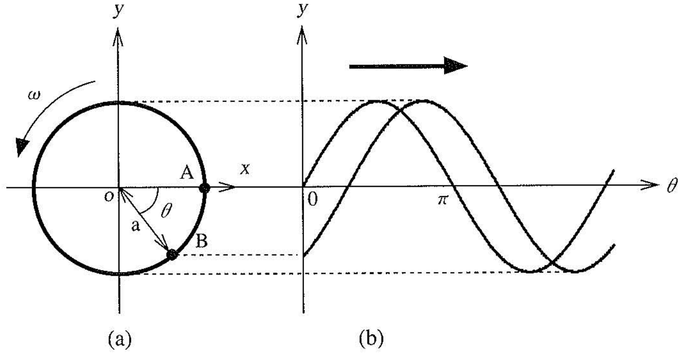


図1.3　位相のずれ

位相という。初期位相を ϕ で表すと、一般に波の変位 y は

$$y = a\sin(\omega t \pm \phi) \tag{1-7}$$

で表される。＋は位相が進んでいることを、－は位相が遅れていることを表す。

1.3　波動関数

波動である光は、媒質中を電磁界の変動が次々と伝搬し、その物理量である振幅は位置xと時間tの関数であり、一般に$f = f(x,t)$ で表される。f () は一般的な関数 (function) を意味する。いま、**図1.4**に示すように、波が速さvでx方向に進むと、位置xがある時刻tにどのような変位yになるかを考える。二点O、P間の距離をxとすると、点Oを通過した波が点Pに到達するまでに時間$t_1 = x/\mathrm{v}$かかる。つまり、**図1.3**の場合と同じく点Pは点Oより位相が遅れていることになる。したがって、点Oの時刻tにおける位相をωtとすると、点Pの位相は

$$\omega(t - t_1) = \omega(t - x / \mathrm{v}) \tag{1-8}$$

となる。したがって、点Oを原点としたとき、xだけ離れた点Pの変位yは$y = f\{\omega(t-x/\mathrm{v})\}$ で表される。波の周期をT、波長をλ、波数をβとすると

$$\omega x / \mathrm{v} = (2\pi\nu / \mathrm{v})x = (2\pi / \lambda)x = \beta x \tag{1-9}$$

となるから

$$y = f(\omega t - \beta x) \quad \text{あるいは} \quad y = f(t / T - x / \lambda) \tag{1-10}$$

と表される。これが、x方向に進む波（進行波）の波動方程式の一般解であり、“時間の係数は正で、距離の係数は負” になることが分かる。

具体的な式の形を求めるためには、マクスウェルの波動方程式を解かなければならない。簡単のため、変位をy、位置をx、時間をtとすると、それは偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \mathrm{v}^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{1-11}$$

となる。いきなり難しいそうな偏微分方程式が出てきたが、少しだけ我慢して続けることにする。いま、光の波形がきれいな振幅aの正弦波であるとして

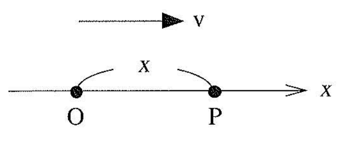


図1.4　移動する波

$$y = a\sin(\omega t - \beta x) = a\sin 2\pi(t/T - x/\lambda) \tag{1-12}$$

と仮定しよう。yをtあるいはxで偏微分すると

$$\frac{\partial y}{\partial t} = a\omega\cos(\omega t - \beta x)、\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -a\omega^2\sin(\omega t - \beta x) \tag{1-13}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -a\beta\cos(\omega t - \beta x)、\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -a\beta^2\sin(\omega t - \beta x) \tag{1-14}$$

が得られる。したがって、

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{\beta^2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{1-15}$$

となる。

$$\frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi\nu}{2\pi/\lambda} = \nu\lambda = \mathrm{v} \tag{1-16}$$

だから仮定した（1-12）式は波動方程式（1-11）式と一致し、今後、光の振幅の変位を表す式を（1-12）式と考えても問題はなさそうである。（1-12）式でsineの代わりにcosineとしても、波動方程式を満足するが、一般には、光はsineで表されることが多く、正弦関数のなめらかさを持ってその振幅が周期的に変化するので、通常は余弦波と言わずに正弦波（sine wave）と呼ばれる。

しかし、多くの解説書では一般に光を正弦波として、その波動関数は

$$y = a\exp i(\omega t - \beta x) = a\exp i\,2\pi(t/T - x/\lambda) \tag{1-17}$$

と虚数単位i（$i^2 = -1$）を使用した指数関数で当然のように表されている。オイラー（L.Euler）の公式によれば、アーギュメント（argument、変数）をxとすると

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i\sin x \tag{1-18}$$

となる。すると、（1-17）式は

$$y = a\cos(\omega t - \beta x) + i\,a\sin(\omega t - \beta x) \tag{1-19}$$

と書けるが、（1-12）式のような実関数を実関数$a\cos(\omega t - \beta x)$と虚数$i\,a\sin(\omega t - \beta x)$を加算した形で表しても問題がないのだろうか、と考えるのが自然だと思われる。なぜ、（1-17）式のように虚数単位を使用した指数関数で表す、いや、表すことができるのだろうか。よく知られている“ヤングの干渉実験”（**図1.5**）を考えてみよう。光源から放出された平行な単色光が2つのピンホールを通る時に同位相（2つのピンホールを通過する光が同じく山あるいは谷）であれば、2つの光がスクリーン上で山と山の状態で到着すると明るい縞に、山と谷の状態だと暗い縞ができる（ピ